数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 118-130

On variation of generating sets of Coxeter groups

東京大学大学院数理科学研究科　縫田　光司 (Koji Nuida)
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo
日本学術振興会特別研究員 DC2 (No. 16-10825)

概要

Coxeter 群 W とその標準生成系 S の組 (W,S) を Coxeter 系という。Coxeter 系の構造は、Coxeter グラフと呼ばれる図形によって完全に特定され、Coxeter 系の同型類と Coxeter グラフの同型類の間の対応が一対一であることも古くから知られている。その一方で、一つの Coxeter 群に対してその標準生成系の取り方は一般に複数存在し、それぞれに対応する Coxeter グラフが互いに同型でなくなる例も知られている。近年になって、このような Coxeter 群の標準生成系の多様性に関する研究が盛んになされるようになってきた。この講演ではそれらの研究結果と、話者による最新の研究の紹介を行った。

1　準備及び問題設定

Coxeter 系とは、群 W とその生成系 S の組 (W,S) のうち、W が以下のような群表示を持つものをいう：

$$W=\langle S \mid (st)^{m(s,t)}=1 \text{ for } s,t\in S \text{ s.t. } m(s,t)<\infty\rangle.$$

ここで、m は写像 $S\times S\to\{1,2,3,\dots\}\cup\{\infty\}$ で、両成分に関して対称的、かつ $m(s,t)=1\Leftrightarrow s=t$ を満たすものである（[11] などを参照)。例えば、W は生成系 S の全ての元 s について $s^2=1$ という関係を持ち、一方 $m(s,t)=\infty$ のときには s と t の間の関係は特に定めない。この $m(s,t)$ を集めた行列 $(m(s,t))_{s,t\in S}$ を *Coxeter* 行列と呼ぶことも多い[1]。ある生成系 S（と写像 m）に関して (W,S) が Coxeter 系となるとき、W 自身を *Coxeter* 群という。なお本稿では、単に「W の生成系」と書いた場合、その生成系は Coxeter 群としての生成系である（つまり、ある m について上記のような群表示を与える）ことを仮定する。

通常、上述の写像 m を記述するには、Coxeter 行列よりも *Coxeter* グラフと呼ばれるグラフを用いることが多い。このグラフは生成系 S を頂点集合とする（無向）単純グラフで、異なる 2 頂点 s,t は $3\le m(s,t)\le\infty$ のとき、またそのときに限り、ラベル $m(s,t)$ を持つ辺で結ばれる。ただし、実際に現れる例ではラベル 3 を持つ辺が多数描かれることが多いので、3 というラベルは省略されることがほとんどである。Coxeter グラフ Γ の定める Coxeter 系を $(W(\Gamma),S(\Gamma))$ と書く。図 1 は B_n 型の Coxeter グラフ $\Gamma(B_n)$ であり、それが定める群 $W(B_n)=W(\Gamma(B_n))$ は n 文字の符号付き置換の群として知られる B_n 型有限 Coxeter 群である（下記例 1.4 参照)。

[1] ただし、生成系 S の濃度は有限（もしくは加算）とは限らないので、実際にこれを行列の形に書き表せるかどうかは定かでない。これは後述する Coxeter グラフに関しても同様である。

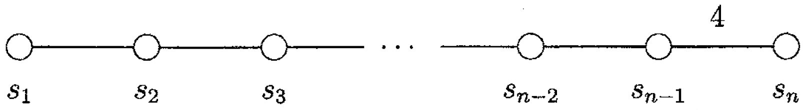

図 1: B_n 型の Coxeter グラフ（頂点数 n）

二つの Coxeter 系 (W,S) と (W',S') について、群としての同型写像 $f:W\to W'$ で S を S' にぴったり写すものを、これらの Coxeter 系の間の同型写像と呼ぶ。この意味での同型写像が存在するとき、これらの Coxeter 系は同型であるという。

ここで、次の命題が成立する。

定理 1.1 上記の表示を持つ Coxeter 群 W において、二つの生成元 $s,t\in S$ の積 st の位数は $m(s,t)$ と一致する（例えば、$m(s,t)=\infty$ であれば st の位数は無限である）。

このことは、Coxeter 系の定義に現れた写像 m（もしくは Coxeter グラフ）が、出来上がった Coxeter 系 (W,S) から一意に復元できることを意味する。従って、Coxeter 系に関する**同型問題** — 与えられた二つの Coxeter グラフがいつ同型な Coxeter 系を定義するか[2] — は殆ど自明な問題である。つまり、二つの Coxeter グラフが同型な Coxeter 系を定めることと、もとの Coxeter グラフ同士が同型なことは同値である。

なお、このグラフによる Coxeter 系の表示は群の直積の演算と相性が良い。詳しく述べると、Coxeter グラフ Γ が定める Coxeter 群 $W(\Gamma)$ は、Γ の各連結成分 Γ_i（これもまた Coxeter グラフである）が定める Coxeter 群 $W(\Gamma_i)$ の直積[3]となっている。この事実に基づき、各部分群 $W(\Gamma_i)$ のことを $W(\Gamma)$ の**既約成分** (*irreducible component*) と呼び、またただ一つの既約成分からなる Coxeter 群のことを既約 Coxeter 群と呼ぶ。

しかし、注意深く考えると、Coxeter グラフが元々定めていたのはあくまで Coxeter 系 (W,S) であるから、Coxeter 群 W 単体に対して、上記の既約性や既約成分の概念が生成系 S によらず定まるとは限らない。より一般に言えば、Coxeter 群に関する同型問題 — 二つの Coxeter グラフがいつ同型な群を定めるか — は決して自明ではなく、実際に次の事実が知られている。

事実 1.2 ある Coxeter 群 W が二つの異なる生成系 S、S' を持ち、しかも (W,S) に対応する Coxeter グラフ Γ と (W,S') に対応するグラフ Γ' が同型でない場合がある。またこのとき、Γ は連結だが Γ' は連結でないこともある。

例 1.3 二面体群 $\mathcal{D}_n$（正 n 角形の合同変換群）は、正 n 角形 Δ の隣接する対称軸に関する折り返しをそれぞれ s、t とおくと、

$$\mathcal{D}_n=\langle s,t \mid s^2=t^2=(st)^n=1\rangle$$

という群表示を持つ。(積 st が $(360/n)$ 度回転を表す。) つまり $\mathcal{D}_n$ は（$I_2(n)$ 型と呼ばれる）有限 Coxeter 群 $W(I_2(n))$ である（図 2 左図）。

[2] 場面によって「同型問題」という用語の意味が微妙に異なるようであるが、ここではこのような問題を Coxeter 系（や Coxeter 群）の同型問題と呼ぶことにする。

[3] 本稿では、単に「直積」と書いた場合、完全直積ではなく制限直積を指すものとする。

一方、$n = 4k + 2$（k は自然数）のとき、Δ の頂点を一つおきに結んで正 $2k+1$ 角形 Δ' を描くと、Δ' をそれ自身に写すような Δ の合同変換全体は $\mathcal{D}_{2k+1}$ と同型な $\mathcal{D}_{4k+2}$ の部分群をなす。このとき $\mathcal{D}_{4k+2}$ はこの部分群と Δ の 180 度回転 ρ によって生成されており、さらに $\mathcal{D}_{4k+2}$ は ρ が生成する位数 2 の部分群と $\mathcal{D}_{2k+1}$ との直積となっている。

位数 2 の群は A_1 型と呼ばれる Coxeter 群であるから、二面体群 $\mathcal{D}_{4k+2}$ は通常の $I_2(4k+2)$ 型 Coxeter 群としての生成系 $\{s,t\}$ の他に、$A_1 \times I_2(2k+1)$ 型 Coxeter 群としての生成系も持っている（図 2 右図）。前者の Coxeter グラフは連結、後者では非連結であるから、これが事実 1.2 の一つの例である。

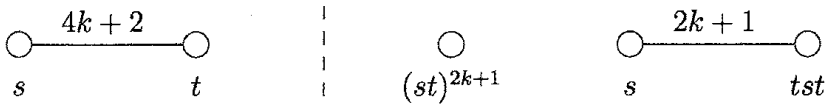

図 2: 例 1.3 の Coxeter グラフ（左が $I_2(4k+2)$ 型、右が $A_1 \times I_2(2k+1)$ 型）

なお、例 1.3 において $n = 4k$ の場合には、180 度回転 ρ が Δ' をそれ自身に写すため、上記と同様の結論は成り立たない。実際、$n \not\equiv 2 \pmod 4$ ならば、$\mathcal{D}_n$ は $I_2(n)$ 型以外の Coxeter 群としての表示を持たないことが知られている。

例 1.4 自然数 n について、$\{\pm1, \pm2, \ldots, \pm n\}$ の置換 σ で $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ を満たすもの (signed permutation) 全体のなす群は B_n 型（有限）Coxeter 群 $W(B_n)$ である。ここで、生成元としては「互換」$s_i = (i\ \ i+1)$、$1 \le i \le n-1$、と $s_n = (n\ \ -n)$ をとった（図 1 参照）。（各 s_i は $\pm i$ と $\pm(i+1)$ をそれぞれ入れ替え、s_n は n と $-n$ を入れ替える置換である。）

$W(B_n)$ において、$1, 2, \ldots, n$ のうち偶数個の文字の符号を変える元全体は指数 2 の（正規）部分群をなす。これは D_n 型 Coxeter 群 $W(D_n)$ である。$W(D_n)$ の生成元としては、$t_i = s_i$ $(1 \le i \le n-1)$ と $t_n = (n-1\ \ -n)$ をとった（図 3）。t_n は文字 $n-1$、n をそれぞれ $-n$、$-(n-1)$ に移す置換である。

ここで n が奇数のとき、全ての文字 i を $-i$ に移す置換 w_0 は $W(B_n)$ の中心の元であり、位数 2 を持ち、しかも n が奇数なので $W(D_n)$ には含まれない。従って $W(B_n)$ は w_0 の生成する位数 2 の群（つまり、A_1 型 Coxeter 群）と $W(D_n)$ との直積であり、再び連結な Coxeter グラフと非連結な Coxeter グラフが同型な群を定める例が得られた。

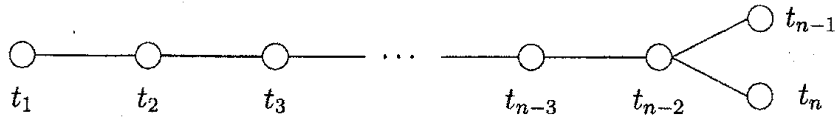

図 3: D_n 型の Coxeter グラフ（頂点数 n）

なお、n が偶数の場合には、置換 w_0 自体が $W(D_n)$ に属するので例 1.4 の結論は成り立たない。例 1.3 同様、このとき実際に $W(B_n)$ が B_n 型以外の Coxeter 群としての表示を持たないことが知られている。

本稿で扱うのは以下の二つの問題である。上記の二つの例は、これらの問題が自明なものではないことを示していると考えられる。

問題 1.5 二つの同型でない Coxeter グラフは、いつ同型な Coxeter 群を定めるであろうか？また、ある Coxeter 群に対して、対応する Coxeter グラフが生成系の取り方によらず一意に定まるのはどのようなときであろうか？

問題 1.6 連結な Coxeter グラフの定める既約 Coxeter 群が二つの（非自明な）Coxeter 群の直積となるのはいつであろうか？より一般に、既約 Coxeter 群が群として直既約でなくなるのはいつであろうか？

問題 1.5 に関連していくつかの概念を導入する。

定義 1.7 Coxeter 群 W について、生成系 S をどのように選んでも結果として同型な Coxeter 系（もしくは Coxeter グラフ）が得られるとき、W は *rigid* であるという。また、二つの生成系 S、S' が常に W の中で共役となる（すなわち、ある $w \in W$ について $S' = wSw^{-1}$ となる）とき、W は *strongly rigid* であるという。

なお、後者のような w によって引き起こされる W の内部自己同型は Coxeter 系 (W, S) から (W, S') への同型写像であるから、strongly rigid な Coxeter 群は rigid である。つまり strong rigid 性は名前の通り rigid 性よりも強い性質である。

この定義に基づくと、問題 1.5 の後半は「rigid もしくは strongly rigid な Coxeter 群を決定せよ」と言い換えることができる。一例として、n 次対称群 $\mathcal{S}_n$ は $n-1$ 個の隣接互換を生成系として A_{n-1} 型 Coxeter 群 $W(A_{n-1})$ となるが、これらは全て rigid である。しかし $n = 6$ のとき、$\mathcal{S}_6$ の別の生成系として cycle type $(2,2,2)$ の元からなるものが存在するため、$\mathcal{S}_6 = W(A_5)$ は strongly rigid ではない（他の $\mathcal{S}_n$ は全て strongly rigid である）。

Coxeter 群に関しては、有限既約 Coxeter 群の分類が 1930 年代に早々と完了したことをはじめ、以前からその性質が良く研究されていた。しかし、問題 1.5 や 1.6 は構造論における基本的な問題であるにも関わらず、これらに関する結果が得られ始めたのはわずか 10 年ほど前のことである[4][5]。今回の講演では、これらの問題に関する最近の結果、および筆者による最新の研究の紹介を行った。

---

[4]勿論、有限 Coxeter 群に関してはこの限りではない。

[5]余談ながら、筆者はその理由として「Coxeter 群が別の分野に登場する際には、元々の問題設定から自然とその生成系が定まることが多いため、異なる生成系の取り方を考えることへの動機が弱かった」ことや「部分群の正規化群（[4]）や中心化群（[3, 15]）の構造など、一般の Coxeter 群の構造論の道具がここ 10 年で整備されてきた」ことが大きいと推測している。

2 様々な rigid 性

前節では Coxeter 群の rigid 性と strong rigid 性を定義した（定義 1.7）。我々の目標は、Coxeter 群のあるクラスに対して、それに属する Coxeter 群の (strong) rigid 性を示すことである。しかし、いきなりこれらの性質を示すのは一般には難しいことから、rigid 性にまつわるいくつかの補助的な性質が定義されている。

2.1 定義

Coxeter 系 (W,S) に対して、W の元のうちで S のある元と共役なものは**鏡映** (*reflection*) と呼ばれる[6]。その全体をここでは鏡映集合と呼び、$R_{W,S}$ で表す。

定義 2.1 Coxeter 系 (W,S) が *reflection rigid* であるとは、$R_{W,S}$ に含まれるような W の任意の生成系 S' について、(W,S) と (W,S') が同型であることを指す。また、このような S' が常に S と共役なとき、(W,S) は *strongly reflection rigid* であるという。

定義 2.2 Coxeter 群 W について、その鏡映集合 $R_{W,S}$ が生成系 S によらず一定であるとき、W は *reflection stable* であるという[7]。

ここで、reflection rigid 性やその strong 版は、Coxeter 群 W ではなく Coxeter 系 (W,S) の性質であることに注意する必要がある。（一方、reflection stable 性は、生成系とは無関係に、Coxeter 群に対して定義されている。）なお、定義 2.2 は実際には「ある生成系 S を取ると、他の生成系 S' は全て鏡映集合 $R_{W,S}$ に含まれる」という定義と同値である。

例 2.3 例 1.3 で見た通り、正の整数 k に対し、$I_2(4k+2)$ 型有限 Coxeter 群 $W(I_2(4k+2))$ は rigid ではないが、この群と標準生成系 $\{s,t\}$ からなる Coxeter 系は reflection rigid である（下記定理 2.8 参照）。しかし、$k \geq 2$ のときこの Coxeter 系は strongly reflection rigid ではない（$k=1$ のときは strongly reflection rigid である）。

例 2.4 n 次対称群 $\mathcal{S}_n$（を、隣接互換を生成系として Coxeter 群 $W(A_{n-1})$ とみたもの）における鏡映集合は互換の全体である。前節の最後に述べた通り、6 次対称群 $\mathcal{S}_6$ $(=W(A_5))$ は互換ではない元からなる生成系を持つので、reflection stable ではない。一方、他の $\mathcal{S}_n$ は全て reflection stable である。

2.2 様々な結果

定義より、(W,S) が (strongly) reflection rigid でかつ W が reflection stable ならば、W は (strongly) rigid である。そこで、ある Coxeter 群が (strongly) rigid であることを示すのに、reflection stable 性と (strong) reflection rigid 性の二段階に分けて示すという方針

[6] 名前の由来について。Coxeter 系 (W,S) に対して、ある線型空間 V への W の標準的な作用が定まる。このとき $w \in W$ が V へ鏡映として作用することと、w が上の意味での鏡映であることが同値である。

[7] この用語は筆者の造語である。ただし、筆者がこの性質に最初に着目したわけではない。

が考えられる。その背景には、Coxeter群における鏡映の性質が非常に良く調べられており、鏡映からなる生成系に対してはそれらの知識を総動員できるため、一般の生成系を扱う場合より遙かに議論しやすいという考察がある。

この方針で得られた結果としては、現在のところ次の結果が最も優れたものであろう[8]。この結果はB. Mühlherr氏ら数名のグループによって得られたもので、2004年5月に行われた研究集会"Coxeter Legacy"において告知されたものである([14])。

定理2.5 有限な連結CoxeterグラフΓの定める群$W(\Gamma)$が無限群で、かつΓのどの辺も∞をラベルに持たないとする。このとき$W(\Gamma)$はstrongly rigidである。

この結果と後述の定理4.1を組み合わせると、有限な生成系を持つCoxeter群の同型問題(問題1.5)は、CoxeterグラフΓが連結で、かつそのある辺が∞をラベルに持つ場合に帰着されたことになる[9]。

他にも(strong) rigid性に関する結果がいくつか知られている。

定理2.6([18]) CoxeterグラフΓの全ての辺がラベル∞を持つとき、$W(\Gamma)$はrigidである。

定理2.7([5]) Coxeter群Wがある可縮な多様体にeffective、proper、cocompactに作用しているとき、Wはstrongly rigidである。特にアフィンWeyl群(をCoxeter群と見たもの)はstrongly rigidである。

一方、reflection rigid性やreflection stable性に関しても以下のような結果が得られている。

定理2.8([2]、**定理3.10**) Wが有限Coxeter群のとき、任意の生成系Sについて(W,S)はreflection rigidである。

定理2.9([2]、**定理3.9**) CoxeterグラフΓのどの辺も奇数をラベルに持たないならば、$(W(\Gamma),S(\Gamma))$はreflection rigidである。

また、筆者は2004年に以下の結果を得た[10]。

定理2.10 無限Coxeter群Wが指数2の(正規)部分群をただ一つ持つと仮定する。このときWはreflection stableである。

この定理の前提は、「Wが無限群で、Wを定めるある(もしくは任意の)CoxeterグラフΓの任意の2点が、奇数をラベルに持つような辺だけを使って結ばれる」ことと同値である。特にこのようなΓは連結であるから、この前提を満たすWは既約である。なお、定理2.5やその拡張版は有限生成なCoxeter群に関する結果であるが、定理2.10は有限生成ではない場合も含む結果であることを注意しておく。

---

[8]実際はこの結果はもう少し拡張できるらしいが、それを述べるには色々と準備が必要なので、ここでは割愛させて頂く。

[9]Coxeter群Wの生成系Sが有限集合であることと、Wが有限生成であることは同値である。つまり、生成系の有限性は生成系の選び方によらない性質である。

[10]現在(2005年1月末)、その論文を準備中である。

3 Diagram twisting

事実1.2の具体例としては、例1.3と1.4が古くから知られていたが、一方でそのような例は本質的には「既約 Coxeter 群 $\simeq$ 非既約 Coxeter 群」という形のものしか知られていなかった。そのような状況を踏まえ、A. M. Cohen 氏は1991年の論文[6]で、事実1.2の具体例で両者がともに既約 Coxeter 群であるものが存在するだろうか、との問いを提示した（Problem 6.5）。この問いに対する答えを与えたのが、Mühlherr 氏による2000年の論文[13]である。

例3.1（**Mühlherr**）図4に示した互いに同型でない連結 Coxeter グラフは、互いに同型な（無限）Coxeter 群を定める。

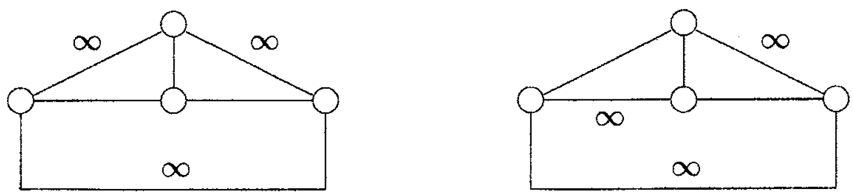

図 4: Cohen 氏の問いに対する解答

元々の論文では、両者の定める Coxeter 群の間の同型写像を実際に書き下すことで証明がなされているが、その後この証明を洗練した一般的な結果が Mühlherr 氏を含む4氏によって発表された（[2]、2002年）。そこで導入されているのが"diagram twisting" という Coxeter グラフに対する操作である。グラフの定める Coxeter 群はこの操作により不変である（下記定理3.4参照）ので、diagram twisting を用いることで Cohen 氏の問いに対する反例を無数に得ることができる。

diagram twisting の定義を紹介する前に、Coxeter 群の放物型部分群とその最長元について復習しておく。

定義3.2 Coxeter 系 (W, S) において、S の部分集合 I によって生成される W の部分群 W_I を、I の生成する W の**放物型部分群** (*parabolic subgroup*) という。この W_I と生成系 I の組 (W_I, I) はまた Coxeter 系となる。

W_I が有限群であるとき、W_I は（生成系 I に関する）長さが最長の元 $w_0(I)$ をただ一つ含む（この元の位数は2である）。このとき、(W_I, I) に対応する Coxeter グラフ（これは (W, S) に対応するグラフの部分グラフとなる）の自己同型写像 σ_I で、任意の $s \in I$ に対して $w_0(I)sw_0(I) = \sigma_I(s)$ を満たすものが存在する。

diagram twisting の定義は以下の通りである。

定義3.3 (W, S) を Coxeter 系、Γ を対応する Coxeter グラフとする。S の互いに交わらない部分集合 I, J が、

1. W_J は有限群

2. s を I、J に含まれない S の任意の元とすると、s は I の全ての元と（Γ において）∞ をラベルに持つ辺で結ばれているか、J のどの元とも（Γ において）辺で結ばれていないかのいずれかである

を満たすとする。このとき「I の任意の元 s_1 と J の任意の元 s_2 を結ぶ Γ の辺を、s_2 の代わりに $\sigma_J(s_2)$ へ結び直す」という操作を、$w_0(J)$ による（もしくは J の周りでの）I の *diagram twisting* と呼ぶ。

例えば図 4 において、左端の 1 点を I、中間の縦に並んだ 2 点を J とおくと、左側のグラフにおいてこの定義の条件が満たされている。(W_J は A_2 型有限 Coxeter 群で、σ_J は J の 2 点を交換する写像である。）このとき、J の周りで I の twisting を行うと、図 4 の右側のグラフが得られる。つまり、diagram twisting は実際に Mühlherr 氏の例（例 3.1）を一般化したものである。

定理 3.4（[**2**]）定義 3.3 において、diagram twisting で得られた Coxeter グラフを Γ' とおくと、$W(\Gamma') \simeq W(\Gamma)$ が成り立つ。より詳しくは、W の部分集合 S' を

$$S' = \{w_0(J)sw_0(J) \mid s \in I\} \cup (S \setminus I)$$

で定めると、(W, S') は Coxeter 系であり、対応する Coxeter グラフは Γ' である。

上の S' の形から、S' は鏡映集合 $R_{W,S}$ に含まれており、このことから $R_{W,S} = R_{W,S'}$ が従う。つまり diagram twisting は $W(\Gamma)$ だけでなく $W(\Gamma)$ の鏡映集合をも保つ操作である。一方で、一般にはこの S' は S と共役にはならないので、たとえ Γ' が Γ と同型になる場合であっても、$W(\Gamma)$ の strong rigid 性は崩れていることが多い。

なお、diagram twisting が定義された論文 [2] において、以下の予想が提示されている。

予想 3.5 もし Coxeter 群 W の二つの生成系 S、S' の定める鏡映集合が等しければ、両者の定める Coxeter グラフ同士は有限回の diagram twisting によって互いに移り合う。

なお、生成系を有限集合と仮定しない場合はこの予想の簡単な反例が存在する[11]ので、上の予想では生成系は有限集合であると仮定する必要がある。

前述の定理 2.5 の前提が満たされるとき、その Coxeter グラフに対する任意の diagram twisting は、($w_0(J)$ の引き起こす) W の内部自己同型によって実現されることが証明できる。つまり、定理 2.5 は、このような最も簡単な場合について予想 3.5 を肯定的に解決したものでもある。

4 Coxeter 群の同型問題と Coxeter 群の直既約性

この節では、問題 1.5 の前半部（つまり、二つの Coxeter 群がいつ同型になるかの判定）及び問題 1.6（既約 Coxeter 群がいつ直既約となるか）に焦点を当てる。これらの問題に

[11]例えば、無限個の場所で独立に diagram twisting を行えるグラフを考えればよい。

関しても、有限型及びアフィン型のような特別な場合を除いては、一般的な結果は最近までほとんど得られていなかった。しかし、2004年から2005年にかけて、以下のような結果が立て続けに発表された。

定理 4.1 二つのCoxeter系(W,S)、(W',S')について、WとW'が互いに同型であるためには以下の2条件が必要充分である：

1. Wの（Sに関する）既約成分のうち有限群であるもの全ての直積W_{fin}と、(W',S')から同様に定めたW'の部分群W'_{fin}が（抽象群として）同型である。
2. Wの既約成分で無限群であるものと、W'の同様の既約成分が一対一に対応し、しかも対応する既約成分同士が（抽象群として）同型となる。

定理 4.2 任意の無限既約Coxeter群は（抽象群として）直既約である。より詳しくは、既約Coxeter群Wが非自明な直積分解を持つならばWは有限群であり、その分解は以下の4通りに限られる：

1. $W=W(I_2(4k+2))$、$W\simeq W(A_1)\times W(I_2(2k+1))$ （例1.3)
2. $W=W(B_{2k+1})$、$W\simeq W(A_1)\times W(D_{2k+1})$ （例1.4)
3. $W=W(E_7)$、$W\simeq W(A_1)\times W^+$
4. $W=W(H_3)$、$W\simeq W(A_1)\times W^+$

なお、3と4に現れたW^+はWにおいて長さ偶数の元全体のなす指数2の（正規）部分群である（これらはCoxeter群ではない)。

これらの定理は、2004年12月のL. Paris氏の論文（[17]）においてWが有限生成の場合に、続いて2005年1月の筆者の論文（[16]）において一般の場合に示された[12]。この結果から、問題1.5の前半部に関しては、今や無限既約Coxeter群の場合のみを考えれば充分である。なお、本稿執筆時点（2005年1月末）で、これらの論文は未だ雑誌には掲載されておらず、プレプリントサーバー (arXiv:math) に置かれているのみである。

なお、定理4.1の条件1におけるW_{fin}とW'_{fin}の同型判定に関して述べておく。まずそれぞれの既約成分のうち、定理4.2の左辺に現れているものを右辺のように分解する。そのように分解しきった上で、それぞれの直積因子が条件2の要領で一対一対応する場合に限り、両者は同型であることが示されている。

一方、問題1.6は定理4.2によって完全に解決された。定理の注意にある通り$W(E_7)^+$及び$W(H_3)^+$はCoxeter群ではない[13]ので、既約Coxeter群が二つのCoxeter群の直積となる場合は、実は例1.3と1.4によって尽くされていたのである。

これらの定理の（筆者による）証明について少しだけ触れておく。証明では、既約Coxeter群Wにおける、位数2の元によって生成されているような正規部分群Hの中心化群$Z_W(H)$

[12]ここで、筆者は2004年10月の講演当時に既にこの結果を持っており、また両者の証明の核となる部分は本質的に異なることを強調しておきたい。Paris氏の証明ではWの有限生成性が本質的に効いており、直ちにその仮定を外すことはできないものと思われる。

[13]前者は$S_6(2)$と書かれるLie型の単純群、後者は5次交代群A_5である。

について考察し、まずその構造を完全に決定した。その内容から得られる系として、H もしくは $Z_W(H)$ のいずれかが W の中心 $Z(W)$ に含まれている極端な場合を除き、H と $Z_W(H)$ はともに W の共通の真部分群に含まれることが示される。ここで W が二つの自明でない部分群 G、G' の直積に分かれるとすると、G は位数2の元で生成される正規部分群であり、G' は $Z_W(G)$ に含まれるので、上の系から G もしくは G' が $Z(W)$ に含まれることになる。W が無限群であれば $Z(W)$ は自明な群なので、この場合における定理4.2の結論が従う。残りは W が有限群であって $Z(W)$ がその直積因子となる場合であるが、それは有限既約 Coxeter 群の分類定理に従って個別に解決される。こうして定理4.2が示された。定理4.2に基づくと、定理4.1は群の直既約分解に関する Krull-Remak-Schmidt の定理の証明とほぼ同様にして示すことができる。

なお、Paris 氏の証明では、Coxeter 群におけるどの放物型真部分群の元とも共役にならない元（その論文では essential element と呼ばれている）の中心化群の性質を利用している。しかし、定義から、有限生成でない Coxeter 群は essential element を持ち得ない。このことが氏の証明において Coxeter 群の有限生成性が本質的だという理由である。

いずれの証明においても、Coxeter 群のある部分群の中心化群を調べることが重要であった。一般の場合においてこれらの部分群の性質が調べられ始めたのはわずか10年ほど前のことである（[3]）。Coxeter 群は数学の様々な分野に昔から現れており、深く研究された対象であるにも関わらず、その長い歴史に比べ、Coxeter 群自身の群論的性質に関する研究の歴史はまだまだ短いものであると言えよう。だからこそ、今後の Coxeter 群に関する研究の進展が大いに期待されるのである。

5 Coxeter 群の自己同型群

筆者及び Paris 氏の論文において、定理4.1を示す際、そのような二つの Coxeter 群が同型になるための必要充分条件だけでなく、その同型写像の形についても述べられている。大まかに説明すると Coxeter 群 W と W' の間の同型写像は、W の各既約成分をそれに（条件2の要領で）対応する W' の既約成分の「ほとんど」上に写すことが示されている[14]。ここで W' として W 自身をとれば、W の自己同型群 $\mathrm{Aut}(W)$ の記述が得られることになる。

W が既約でないとき、W の各既約成分の自己同型写像は自然に W 全体の自己同型へと拡張される。また、W の既約成分のうちで互いに同型なものを入れ替える写像、つまり既約成分の同型類の上の置換も自然に W の自己同型を定める。ここではこれらの自己同型を W の「自然な」自己同型と呼ぶことにしよう。すると W の自然な自己同型が生成する $\mathrm{Aut}(W)$ の部分群は、各既約成分をある既約成分の上に写すような W の自己同型のなす群と一致する。この自然な自己同型の生成する群について、定理4.1を応用することで以下の結果が得られた。

まず用語の定義を与えておく。Coxeter 系 (W,S) に対応する *odd Coxeter* グラフ Γ^{odd} と

[14] ぴったり上に写していない場合は、W' の中心に属する元の分だけ外にはみ出している。従って、特に W' の中心が自明である場合には、W の各成分は対応する成分にぴったり写されている。

は、(W,S) に対応する Coxeter グラフの辺のうち、偶数もしくは ∞ をラベルに持つ辺を全て取り除いてできるグラフを指す。例えば、定理 2.9 の前提は「Γ^{odd} が辺を持たない」、定理 2.10 の前提は「Γ^{odd} が連結」とそれぞれ言い換えることができる。

定理 5.1（[16]）一般の Coxeter 系 (W,S) に対して以下は同値である：

1. $\mathrm{Aut}(W)$ の中で、W の自然な自己同型が生成する部分群は指数有限である。
2. W の中心が自明であるか、もしくは (W,S) に対応する odd Coxeter グラフが連結成分を有限個しか持たない。

特に、W が有限生成ならば Coxeter グラフ自体が連結成分を有限個しか持たないので、この定理の条件 2 が常に満たされる。従ってこの場合、W は性質 1 も常に持つことがわかる[15]。なお、odd Coxeter グラフの連結成分の個数は生成系 S の選び方によらないことが示せるので、上の条件 2 は実際は S の選び方と無関係な条件である。

他にも、Coxeter 群の自己同型群に関する結果がいくつか知られている。R. B. Howlett 氏ら 3 氏は、1997 年の論文 [10] において、有限な Coxeter グラフ Γ のどの辺も ∞ をラベルに持たないとき、$\mathrm{Aut}(W(\Gamma))$ の中で内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(W(\Gamma))$ が有限指数を持つことを証明した。前述の定理 2.5 はこの結果を発展させたものとも見ることができる。さらに、W の生成系が 3 元からなるときの $\mathrm{Aut}(W)$ の構造が W. N. Franzsen 氏らの論文 [8, 9] で、また Coxeter グラフ Γ の全ての辺が ∞ をラベルに持つときの $\mathrm{Aut}(W(\Gamma))$ の構造が Mühlherr 氏の論文 [12] でそれぞれ調べられている。

6 今後の展望

Mühlherr 氏らの結果や筆者の結果から、Coxeter 群の同型問題や自己同型群を決定する問題は、Coxeter グラフが連結で ∞ をラベルに持つ辺が存在する場合に帰着された。今後は、予想 3.5 を解決するためにどのような方法が有効なのかを探っていきたい。

また、筆者は現在、生成系に依存しないような Coxeter 群の特徴付けにも興味を持っている。Coxeter 群の特徴付けとしては論文 [7] などに様々なものが記されてはいるが、それらはある生成系が与えられた上で、その群と生成系の組が Coxeter 系となる必要充分条件という形でしか述べられていない。そのため、例えばある群が Coxeter 群でないことを示そうとしたら、原理的には任意の生成系 S についてそれらの特徴付けを試さなければならないことになるが、それは一般には極めて困難である。このようなときには、生成系に依存しない形の特徴付けの方が便利であろう。

そのような特徴付けを探すには、まずは生成系に依存しない Coxeter 群固有の性質を積み重ねていくことが必要と思われる。例えば、Coxeter 群は常に「位数 2 の元で生成されている」「中心が初等可換 2-群である」を満たすので、逆にこれらを満たさない群は Coxeter 群ではないことがわかる。このような Coxeter 群固有の性質を探し、最終的には上記のような Coxeter 群の特徴付けを見出すことが、現在における筆者のもう一つの目標である。

[15] W が有限生成の場合におけるこの事実は、Paris 氏の論文でも示されている。

付録：有限既約 Coxeter 系の諸性質の表

下表は有限既約 Coxeter 系 (W, S) の rigid 性や関係する性質をまとめたものである。

- 定理 2.8 よりこれらは全て reflection rigid である。
- 異なる型の有限既約 Coxeter 群同士は同型ではない（位数を比較すればよい）ため、ある W が rigid でないとしたらそれは既約でない Coxeter 群と同型になる。従って、表の rigid 性に関する部分は定理 4.2 より従う。
- W が rigid なとき、strong rigid 性など他の性質について調べるには W の自己同型群を調べればよい。この部分は坂内英一先生の論文 [1] によった。(strong reflection rigid 性に関しても同様の原理が成り立つ。)

型		strongly rigid	rigid	strongly reflection rigid	reflection stable
A_n	$(n \neq 5)$	○	○	○	○
A_6		×	○	○	×
B_2		○	○	○	○
B_n	$(n \geq 3$ odd$)$	×	×	○	×
B_n	$(n \geq 4$ even$)$	×	○	○	×
D_n	$(n \geq 5$ odd$)$	○	○	○	○
D_n	$(n \geq 4$ even$)$	×	○	○	×
E_6, E_7		○	○	○	○
E_8		×	○	○	×
F_4		×	○	○	×
H_3		×	○	×	○
H_4		×	○	×	×
$I_2(m)$	$(m \not\equiv 2 \pmod 4)$	×	○	×	○
$I_2(6)$		×	×	○	×
$I_2(4k+2)$	$(k \geq 2)$	×	×	×	×

参考文献

[1] E. Bannai, Automorphisms of irreducible Weyl groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 16 (1969) 273–286.

[2] N. Brady, J. P. McCammond, B. Mühlherr, W. D. Neumann, Rigidity of Coxeter groups and Artin groups, Geom. Dedicata 94 (2002) 91–109.

[3] B. Brink, On centralizers of reflections in Coxeter groups, Bull. London Math. Soc. 28 (1996) 465–470.

[4] B. Brink, R. B. Howlett, Normalizers of parabolic subgroups in Coxeter groups, Invent. Math. 136 (1999) 323–351.

[5] R. Charney, M. Davis, When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?, J. London Math. Soc. (2) 61 (2000) 441–461.

[6] A. M. Cohen, Coxeter groups and three related topics, Generators and Relations in Groups and Geometries (A. Barlotti et al.), NATO ASI Series, Kluwer Acad. Publ. (1991) pp. 235–278.

[7] V. V. Deodhar, Some characterizations of Coxeter groups, Enseign. Math. (2) 32 (1986) 111–120.

[8] W. N. Franzsen, R. B. Howlett, Automorphisms of Coxeter groups of rank three, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001) 2607–2616.

[9] W. N. Franzsen, Automorphisms of Coxeter groups of rank 3 with infinite bonds, J. Algebra 248 (2002) 381–396.

[10] R. B. Howlett, P. J. Rowley, D. E. Taylor, On outer automorphism groups of Coxeter groups, Manuscripta Math. 93 (1997) 499–513.

[11] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[12] Automorphisms of graph-universal Coxeter groups, J. Algebra 200 (1998) 629–649.

[13] B. Mühlherr, On isomorphisms between Coxeter groups, Des. Codes Cryptogr. 21 (2000) 189–189.

[14] B. Mühlherr, On the isomorphism problem for Coxeter groups, The Coxeter Legacy: Reflections and Projections, Toronto, May 12–16, 2004.

[15] K. Nuida, On centralizers of parabolic subgroups in Coxeter groups, arXiv:math.GR/0501061.

[16] K. Nuida, On the direct indecomposability of infinite irreducible Coxeter groups and the Isomorphism Problem of Coxeter groups, arXiv:math.GR/0501276.

[17] L. Paris, Irreducible Coxeter groups, arXiv:math.GR/0412214.

[18] D. G. Radcliffe, Rigidity of graph products of groups, Algebr. Geom. Topol. 3 (2003) 1079–1088.